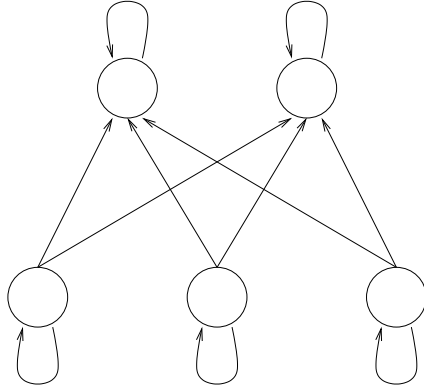


(a)



$$\text{adj}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{norm}(\text{adj}(E)^T) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\text{adj}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{norm}(\text{adj}(E)^T) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: Ein Vektor \mathbf{v} heißt *Eigenvektor* einer linearen Transformation T (und der zugehörigen Matrix), falls sich unter der Transformation allenfalls seine Länge, aber nicht seine Richtung verändert. Es gilt also $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ für einen Skalar λ , der dann *Eigenwert* zu \mathbf{v} genannt wird.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für die folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 15 & -10 \\ 21 & -14 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösungsvorschlag:

1. $\lambda_1 = 1, \mu_1 = -1, \mathbf{u}_1 = (1, 1), \mathbf{v}_1 = (1, -1)$.
2. $\lambda_2 = 3, \mu_2 = -3, \mathbf{u}_2 = (3, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1)$.
3. $\lambda_3 = 1, \mu_3 = 0, \mathbf{u}_3 = (5, 7), \mathbf{v}_3 = (2, 3)$.
4. $\lambda_4 = 0, \mu_4 = 1, \mathbf{u}_4 = (2, 3), \mathbf{v}_4 = (1, 2)$.

b) Sei M eine quadratische Matrix und λ ein Eigenwert von M . Zeigen Sie, dass λ^k ein Eigenwert von M^k und $t\lambda$ ein Eigenwert von tM für jedes t .

Lösungsvorschlag:

Sei \mathbf{u} der Eigenvektor vom M zum Eigenwert λ . Damit ist $M\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ und $M^2\mathbf{u} = MM\mathbf{u} = M(\lambda\mathbf{u}) = \lambda M\mathbf{u} = \lambda^2\mathbf{u}$. Durch Induktion erhalten wir, dass $M^k\mathbf{u} = \lambda^k\mathbf{u}$ und damit λ^k ein Eigenwert für M^k zu dem Eigenvektor \mathbf{u} .

Zweitens gilt $(tM)\mathbf{u} = t(M\mathbf{u}) = t\lambda\mathbf{u}$ und damit $t\lambda$ Eigenwert von M zu Eigenvektor \mathbf{u} .

c) Berechnen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte zu der folgenden Matrix

$$A(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-p & 1+p \\ 1+p & 1-p \end{pmatrix}$$

als Funktion von p . Kommentieren Sie die Lösung im Hinblick auf den PageRank algorithmus und das Perron-Frobenius Theorem.

Lösungsvorschlag:

Offensichtlich ist $(1, 1)$ ein Eigenvektor mit Eigenwert 1. Der zweite Eigenwert ergibt sich z.B. über das charakteristische Polynom $(1, -1)$ mit Eigenwert $-p$.

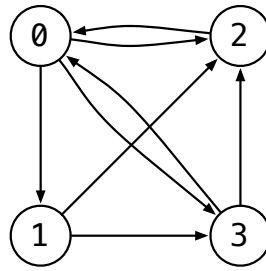
Betrachten wir ein Web mit zwei Seiten, die jeweils auf die andere verlinken. Dann wird im PageRank Algorithmus die folgende stochastische Matrix verwendet:

$$W_p = p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-p) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{pmatrix} + \frac{1-p}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1-p}{2} \begin{pmatrix} 1-p & 2p+1-p \\ 2p+1-p & 1-p \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-p & 1+p \\ 1+p & 1-p \end{pmatrix}$$

was genau $A(p)$ ergibt.

Aufgabe 4-4 PageRank mit *random leap*

Berechnen Sie für den folgenden Web-Graphen die Google-Matrix mit einem *random leap*-Faktor von $\alpha = 0.15$:



Lösungsvorschlag:

Die Google-Matrix ohne *random leap* lautet wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit *random leap*:

$$G = \begin{pmatrix} 0.0375 & 0.0375 & 0.8875 & 0.4626 \\ 0.3208 & 0.0375 & 0.0375 & 0.0375 \\ 0.3208 & 0.4625 & 0.0375 & 0.4625 \\ 0.3208 & 0.4625 & 0.0375 & 0.0375 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der PageRank-Vektor $\mathbf{p} = (0.368, 0.142, 0.288, 0.202)^T$.

In diesem Web hat Seite 2 einen geringeren PageRank als Seite 0. Das gefällt dem Besitzer von Seite 2 gar nicht. Er legt eine neue Seite 4 an, die nur auf Seite 2 verweist. Zu Seite 2 fügt er einen Link auf Seite 4 *hinzu*. Steigt dadurch der Rang von Seite 2 über den von Seite 0?

Lösungsvorschlag:

Die Google-Matrix ohne *random leap* lautet wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit *random leap*:

$$G = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.03 & 0.455 & 0.455 & 0.03 \\ 0.313333 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.313333 & 0.455 & 0.03 & 0.455 & 0.88 \\ 0.313333 & 0.455 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 & 0.455 & 0.03 & 0.03 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der PageRank-Vektor

$$\mathbf{p} = (0.237141, 0.0971898, 0.348894, 0.138496, 0.17828)^T.$$

Damit ist 2 nun tatsächlich wichtiger als 1.